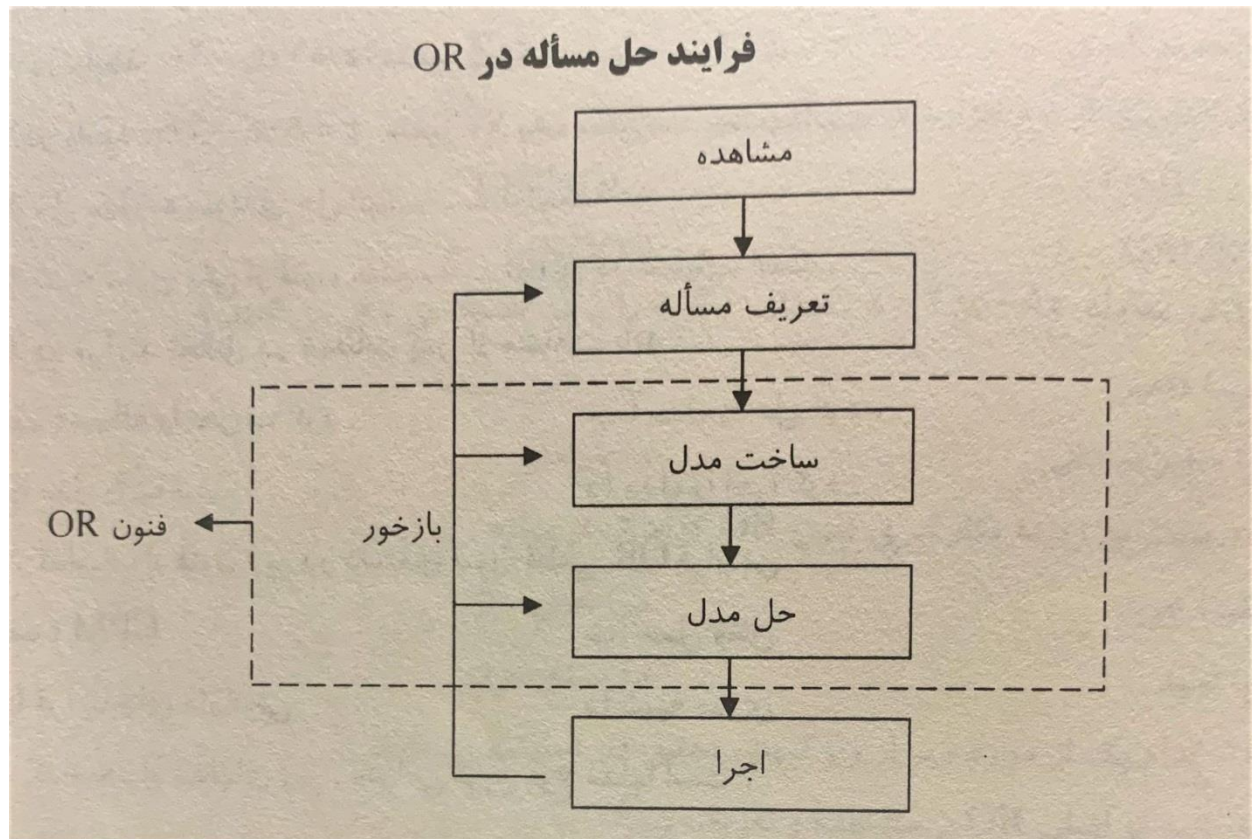


تحقیق در عملیات ۱

دکتر علیرضا شاقوزایی

رویکرد تحقیق در عملیات در حل مساله



مدلسازی و اجزاء مدل

مراحل فرموله کردن مساله های برنامه ریزی خطی

مرحله ۱ - تعریف متغیرهای تصمیم

مرحله ۲ - تعریف تابع هدف

مرحله ۳ - تعیین محدودیت های مدل

مدلسازی	جلسه ۱	تدریس کامل درس تحقیق در عملیات ۱
---------	--------	----------------------------------

مساله ترکیب تولید

شرکت تولیدی پیراهن مردانه می خواهد بداند که از هریک از سه نوع مختلف پیراهن چه مقدار تولید کند تا با رعایت محدودیت منابع حداکثر سود کل را بدست آورد. نیروی کار و پارچه مورد نیاز برای هر واحد و همچنین سهم سود هر یک از سه نوع پیراهن در جدول زیر آمده است:

سود هر واحد	منابع		نوع پیراهن و منابع در دسترس
	پارچه مورد نیاز برای هر واحد (متر)	نیروی کار (ساعت)	
۱۰	۱	۲	پیراهن نوع ۱
۶	۱/۲	۱	پیراهن نوع ۲
۱۴	۱/۵	۳	پیراهن نوع ۳
—	۲۵۰	۹۰	منابع در دسترس

نیروی کار موجود روزانه ۹۰ ساعت و پارچه در دسترس در هر روز ۲۵۰ متر می باشد. هدف تعیین مقدار تولید از هر سه نوع پیراهن است به طوری که سود کل حاصل از تولید آنها حداکثر شود. حال این مساله را در قالب یک مدل برنامه ریزی خطی فرموله کنید.

مدل ساده تولید

یک کارگاه تولید کیف و کفش چرم را در نظر بگیرید که دو نوع محصول کیف و کفش تولید می کند. برای تولید هر واحد کیف و کفش به دو نوع چرم ۱ و چرم ۲ و میزان متفاوتی از نیروی انسانی نیاز است. برای تولید هر واحد کیف به ۵ واحد چرم ۱، ۲ واحد چرم ۲ و ۴ نفر ساعت نیروی انسانی و برای تولید هر واحد کفش به ۲ واحد چرم ۱، ۳ واحد چرم ۲ و ۲ نفر ساعت نیروی انسانی نیاز است. میزان نیروی انسانی در اختیار کارگاه ۸۰ نفر ساعت در هفته و میزان چرم ۱ و چرم ۲ موجود به ترتیب ۱۵۰ و ۱۰۰ واحد است. مدیر کارگاه می خواهد بداند چه تعداد کیف چرم و چه تعداد کفش چرم تولید و به فروش رساند تا سود حداکثر گردد با توجه به اینکه سود هر واحد کیف ۳۵ دلار و سود هر واحد کفش ۲۰ دلار است.

مساله حمل و نقل

یک شرکت تولید و توزیع دارای سه کارخانه تولیدی و سه فروشگاه می باشد. عرضه ماهانه هر کارخانه و تعداد تقاضای ماهانه هر فروشگاه مشخص است. هزینه حمل هر واحد کالا از هر کارخانه به هر فروشگاه به نسبت مسافت تغییر می کند و به شرح جدول زیر است.

از کارخانه	به فروشگاه			مقادیر عرضه
	A	B	C	
۱	۱۶	۱۸	۱۱	۳۰۰
۲	۱۴	۱۲	۱۳	۲۰۰
۳	۱۳	۱۵	۱۷	۲۰۰
مقادیر تقاضا	۱۵۰	۲۵۰	۲۰۰	

مطلوب است فرموله کردن مساله که ضمن تامین تقاضای هر فروشگاه هزینه کل حداقل گردد.

مساله رژیم غذایی

پزشک یک تیم فوتبال درصدد تهیه یک رژیم غذایی برای بازیکنان تیم است. بدین منظور وی سعی دارد استانداردهای بهداشتی را برای آنها تعریف کند. دستورالعمل زیر مطابق این استانداردها ست.

۱. مقدار کالری بین ۱۵۰۰ تا ۲۰۰۰

۲. حداقل ۵ میلی گرم آهن

۳. بین ۲۰ تا ۶۰ گرم چربی

۴. حداقل ۳۰ گرم پروتئین

۵. حداقل ۴۰ گرم کربوهیدرات

۶. حداکثر ۳۰ میلی گرم کلسترول

پزشک تیم بدین منظور برنامه غذایی خود را بر اساس ۷ غذا تنظیم خواهد کرد. میزان ترکیبات هر غذا و هزینه هر واحد از آنها به شرح جدول زیر است. پزشک تیم می خواهد یک رژیم غذایی برای بازیکنان تهیه کند که بتواند ضمن برآورده کردن نیازمندی غذایی اعضای تیم، هزینه غذا نیز حداقل گردد. مساله را به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی فرموله کنید.

مواد اولیه	کالری	(mg) آهن	(g) پروتئین	(g) کربوهیدرات	(g) چربی	(mg) کلسترول	هزینه
مرغ	۵۲۰	۴/۴	۱۷	۰	۳۰	۱۸۰	۶۵
ماهی	۵۰۰	۳/۳	۸۵	۰	۵	۹۰	۴۱
گوشت گوسفند	۸۶۰	۰/۳	۸۲	۰	۷۵	۳۵۰	۲۱
گوشت گاو	۶۰۰	۳/۴	۱۰	۳۰	۳	۰	۹
سیب زمینی	۵۰	۰/۵	۶	۰	۰	۰	۲/۵
کالباس	۴۶۰	۲/۲	۱۰	۷۰	۰	۰	۳
شیر ۲ درصد	۲۴۰	۰/۲	۱۶	۲۲	۱۰	۲۰	۴/۲

مساله تبلیغات بازار

یک شرکت تبلیغاتی می خواهد یک برنامه تبلیغاتی را از طریق سه وسیله رادیو، تلویزیون و مجله به اجرا در آورد. هدف از برنامه تبلیغاتی آگاهی حداکثر مشتریان بالقوه شرکت از برنامه تبلیغی می باشد. نتایج مطالعات بازاریابی در جدول زیر آمده است.

مجله	رادیو	تلویزیون		شرح
		ساعات عادی	ساعات مناسب	
۱۵۰۰۰	۳۰۰۰۰	۴۰۰۰۰	۷۵۰۰۰	هزینه هر بار تبلیغ
۲۰۰۰۰۰	۵۰۰۰۰۰	۴۰۰۰۰۰	۹۰۰۰۰۰	تعداد مشتریان بالقوه ای که از تبلیغ اطلاع پیدا می کنند
۱۰۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰	۴۰۰۰۰۰	تعداد مشتریان زن که از تبلیغ اطلاع پیدا می کنند

حداکثر بودجه تبلیغاتی شرکت ۸۰۰۰۰۰۰ تومان می باشد. شرکت خواهان این امر است که:

۱- حداقل ۲ میلیون نفر از مشتریان زن از تبلیغ آگاهی پیدا کنند

۲- حداکثر بودجه تبلیغ در تلویزیون ۵۰۰۰۰۰ تومان باشد

۳- حداقل سه بار تبلیغ در ساعات عادی روز در تلویزیون و دو بار در ساعات مناسب به عمل آید

۴- تعداد تبلیغات در مجله و رادیو بین ۵ تا ۱۰ بار باشد

مساله را به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی فرموله کنید.

مساله سرمایه گذاری

شخصی دویست میلیون تومان سرمایه دارد که می خواهد در بخش های مختلف سرمایه گذاری نماید. بعد از تجزیه و تحلیل های دقیق، شش گزینه برای سرمایه گذاری تعیین کرده است. اطلاعات زیر گزینه های سرمایه گذاری و برآورد بازده آنها را نشان می دهد.

گزینه های سرمایه گذاری	برآورد بازده (%)
اوراق قرضه	۸/۵
سهام عادی	۱۱
سپرده بانکی	۱۴
اسناد خزانه	۶/۵
سهام تضمینی	۱۰
سهام ممتاز	۱۵

سرمایه گذار به منظور کاهش ریسک درصدد تقسیم سرمایه خود بین بخش های مختلف سرمایه گذاری است. برای گریز از

ریسک سرمایه گذار سیاست سرمایه گذاری را به صورت زیر مشخص کرده است.

۱- مجموع سرمایه گذاری در اوراق قرضه بیشتر از ۱۵ درصد کل سرمایه نباشد

۲- در هر مورد نباید بیش از ۲۵ درصد کل مبلغ، سرمایه گذاری شود

۳- حداکثر ۱۰ درصد در سهام تضمینی، سهام عادی و ممتاز سرمایه گذاری کند

۴- مبلغ سرمایه گذاری در سپرده بانکی بیش از مجموع سرمایه گذاری در ۵ زمینه دیگر نباشد.

۵- مجموع سرمایه گذاری در اسناد خزانه و سپرده بانکی حداقل ۳۰ درصد کل سرمایه باشد.

۶- نسبت مجموع سرمایه گذاری در سپرده بانکی و اسناد خزانه به مجموع سرمایه گذاری در اوراق قرضه و سهام عادی

حداقل ۸/۰ به ۱ باشد.

حال مساله را به منظور حداکثر کردن بازده سالانه ناشی از سرمایه گذاری در زمینه های مختلف فرموله کنید.

مساله کشاورزی

کشاورزان یک منطقه زراعی تصمیم دارند به منظور بهره وری بیشتر ، تمامی عملیات کشاورزی را به شکل تعاونی انجام دهند. این منطقه از سه مزرعه تشکیل شده است. دو عامل زمین و آب امکانات کاشت این مزارع را محدود می نمایند. اطلاعات مربوط به آب موجود و زمین قابل کشت سه مزرعه در جدول زیر آمده است.

مزرعه	زمین قابل کشت (هکتار)	آب موجود (هزار متر مکعب)
۱	۵۰۰	۵۵۰
۲	۸۰۰	۷۰۰
۳	۴۰۰	۴۰۰

محصولات قابل کشت در این منطقه گندم، پیاز و لوبیا است. حداکثر زمین قابل کشت برای هر یک از محصولات ، میزان مصرف آب هر محصول و سود حاصل از هر هکتار بر حسب نوع محصول قابل کشت در جدول زیر آمده است.

محصول	حداکثر زمین قابل کشت (هکتار)	مصرف آب (هزار متر مکعب)	سود هر هکتار
گندم	۵۰۰	۳	۹۰۰۰۰
پیاز	۶۰۰	۴	۷۵۰۰۰
لوبیا	۸۰۰	۲	۶۵۰۰۰

هر یک از محصولات را می توان در هر کدام از مزرعه های سه گانه کشت نمود. اما شرایط زیر باید رعایت شود:

۱-حداقل ۷۰ درصد هر مزرعه زمین باید زیر کشت برود

۲-کشاورز می خواهد که در هر سه مزرعه زمین نسبت مساحت زیر کشت به کل مساحت مساوی باشد.

حال مساله را به گونه ای فرموله کنید که ضمن مشخص شدن مقدار محصول کشت شده در هر مزرعه ، سود کل کشاورز حداکثر شود.

مساله برش

یک شرکت تولید کننده مصالح ساختمانی اخیراً سفارشی برای الوار در سه اندازه مختلف دریافت کرده است .

تعداد سفارش	ابعاد سفارش
۲۷۰۰	۷ متر
۱۸۰۰	۹ متر
۱۶۰۰	۱۰ متر

طول الوارهای موجود در شرکت همگی دارای استاندارد ۲۵ متری است . بنابراین شرکت باید الوارهای استاندارد را به اندازه های سفارش شده برش دهد. این شرکت مایل است بداند الوارهای استاندارد را با چه الگویی برش بزند تا تعداد کل تخته های الوار مورد نیاز برای تامین سفارش حداقل گردد. مساله را به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی فرموله کنید.

مساله شیفت کاری

یک داروخانه شبانه روزی به منظور ارائه خدمات به تعدادی فروشنده به صورت زیر نیازمند است. هر فروشنده هشت ساعت متوالی کار می کند. هدف مدیر این داروخانه تعیین کمترین تعداد فروشنده مورد نیاز است که احتیاجات زیر را برآورده کند. مساله را به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی فرموله کنید.

اوقات روز	حداقل تعداد فروشنده مورد نیاز
۶-۲	۶
۱۰-۶	۸
۱۴-۱۰	۱۴
۱۸-۱۴	۱۶
۲۲-۱۸	۲۵
۲-۲۲	۸

مدل عمومی برنامه ریزی خطی

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \text{ بهینه کنید}$$

St: (به شرط آنکه)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq = \geq) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (\leq = \geq) b_2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq = \geq) b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \quad \text{یا} \quad (\text{متغیرهای آزاد در علامت})$$

روش ترسیمی

مفروضات برنامه ریزی خطی

۱. فرض تناسب

۲. فرض جمع پذیری

۳. فرض بخشپذیری

۴. فرض معین بودن / قطعیت

۱. فرض تناسب

هر فعالیت به تنهایی و مستقل از سایر فعالیت ها عمل می کند.

چنانچه متغیر تصمیم برابر مقداری تغییر کند مقدار تابع هدف نیز دقیقا به همان نسبت تغییر می کند.

۲. فرض جمع پذیری

باید روابط ریاضی بین متغیرها در مدل (چه در تابع هدف و چه در محدودیت ها) به صورت جمع جبری بیان گردد. چنانچه بین متغیرهای مدل ، علامت ضرب وجود داشته باشد فرض جمع پذیری نقض شده است.

$$\begin{array}{ll} \text{رابطه ۱:} & 5x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 7 \\ \text{رابطه ۲:} & 5x_1 + 4x_2 - x_1x_3 \leq 7 \\ \text{رابطه ۳:} & \frac{2x_1 + x_2}{5x_3} \leq 10 \\ \text{رابطه ۴:} & 4x_1 + \frac{3}{x_2} \leq 6 \end{array}$$

نکته : با نقض شدن فرض جمع پذیری در یک مدل اولاً "فرض تناسب نقض می شود ثانیاً" مدل به یک مدل برنامه ریزی غیر خطی تبدیل می شود.

۳. فرض بخش پذیری

مقدار متغیرهای تصمیم هم می تواند عدد صحیح و هم می تواند عدد غیر صحیح باشد .

نکته : با نقض شدن فرض بخش پذیری ، مدل برنامه ریزی خطی به مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح تبدیل می شود.

۴. فرض معین بودن / قطعیت

کلیه پارامترهای مدل برنامه ریزی خطی ثابت ، قطعی ، معین و غیر احتمالی هستند.

این فرض از ورود حالات احتمالی در مدل جلوگیری می کند.

نکته : با نقض شدن فرض قطعیت ، مدل برنامه ریزی خطی به مدل احتمالی تبدیل می شود.

روش ترسیمی یا هندسی

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t. :} \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

خواص روش ترسیمی

سه خاصیت اساسی برای جوابهای گوشه موجه وجود دارند

خاصیت ۱- جواب بهینه مساله برنامه ریزی خطی، قطعاً یکی از جوابهای گوشه موجه است.

خاصیت ۲- تعداد جوابهای گوشه موجه، متناهی است.

حداکثر تعداد جوابهای گوشه، در صورتی که m تعداد محدودیت ها و n تعداد متغیرها باشد برابر است با $\frac{(m+n)!}{m!n!}$

به عبارت دیگر اگر مدلی ۳ محدودیت و ۲ متغیر داشته باشد حداکثر تعداد نقاط گوشه عبارت است از $\frac{(5)!}{3!2!} = 10$

خاصیت ۳- چنانچه یک جواب گوشه موجه از تمام نقاط گوشه موجه مجاور خود از نظر تابع هدف بهتر باشد در این صورت آن نقطه، نقطه بهینه است.

موارد خاص در روش ترسیمی

- ۱- جواب بهینه چند گانه
- ۲- فاقد ناحیه موجه (جواب)
- ۳- ناحیه جواب بیگران
- ۴- جواب تبهکن

۱- جواب بهینه چند گانه

$$\text{Max } Z = X_1 + 2 X_2$$

s.to :

$$5X_1 + 3 X_2 \leq 15$$

$$X_1 + 2 X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

نکته: توازی تابع هدف با یک محدودیت لزوماً به معنای داشتن حالت خاص بهینه چند گانه نیست و ممکن است مساله دارای این حالت خاص باشد.

۲- فاقد ناحیه موجه (جواب)

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 6X_2$$

s.to :

$$X_1 + X_2 \leq 1$$

$$X_1 \geq 2$$

$$X_2 \geq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

۳- ناحیه جواب بیکران

$$\text{Max } Z = 6x_1 - 2x_2$$

s.to :

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

۴- جواب تبیین

$$\text{Max } Z = 3 X_1 + 9 X_2$$

s.to :

$$X_1 + 4 X_2 \leq 8$$

$$X_1 + 2 X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

نکته : تعداد معادلات زائد مدل برابر است با تعداد خطوطی که از نقطه گوشه می گذرند منهای دو

روش سیمپلکس

ساختار الگوریتم سیمپلکس

متغیرهای کمکی

تبدیل مدلهای مختلف به فرم گسترده

- فرم گسترده متغیرهای تصمیم
- فرم گسترده محدودیت ها
- فرم گسترده تابع هدف

ساختار الگوریتم سیمپلکس

سیمپلکس عملیات حل خود را به منظور جستجوی جواب بهینه از **مبدأ مختصات** شروع می کند.

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 3x_2$$

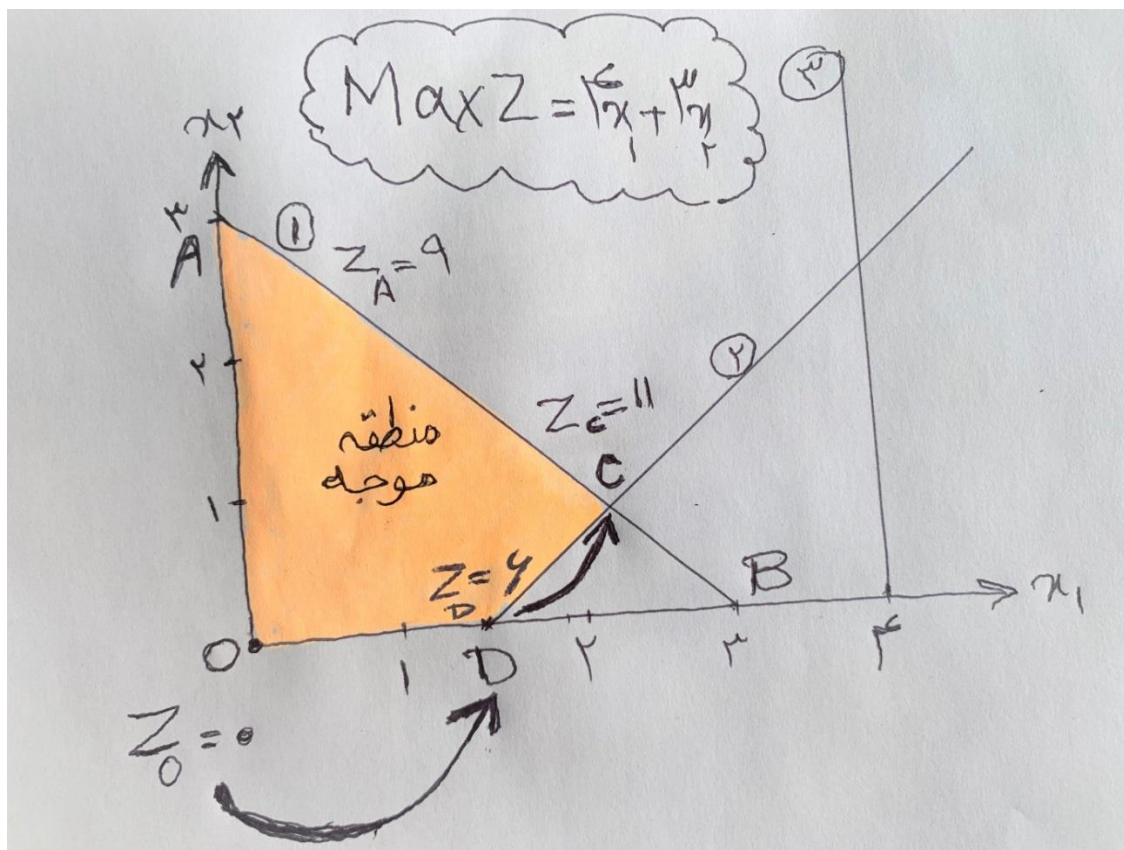
s.to :

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - x_2 \leq 3$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



متغیر های کمکی

$$X_1 + X_2 \leq 3$$



$$X_1 + X_2 + S = 3$$

$$X_1, X_2, S \geq 0$$

نحوه استفاده از متغیر های کمکی در حل مدل به روش سیمپلکس

$4X_1 + 3X_2 \leq 12$	$\rightarrow$	$4X_1 + 3X_2 + S = 12$
$4X_1 + 3X_2 \geq 12$	$\rightarrow$	$4X_1 + 3X_2 - S = 12$
$4X_1 + 3X_2 = 12$	$\rightarrow$	$4X_1 + 3X_2 = 12$ نیاز به متغیر کمکی نیست

نکته : متغیر های کمکی ، بیانگر منابع مصرف نشده (موجودی منبع) می باشند. چنانچه $S_1 = 5$ یعنی اینکه از منبع اول (مثلا" نیروی کار) ۵ واحد استفاده نشده است یا $S_2 = 0$ یعنی اینکه منبع دوم (مثلا" چوب) کاملاً " مصرف شده است.

تبدیل مدل‌های مختلف به فرم گسترده

- فرم گسترده متغیرهای تصمیم
- فرم گسترده محدودیت‌ها
- فرم گسترده تابع هدف

فرم گسترده متغیرهای تصمیم

الف) متغیرهای آزاد در علامت

$$x_i = x'_i - x''_i \quad ; \quad x'_i \geq 0 \quad x''_i \geq 0$$

چنانچه متغیر x_i آزاد در علامت باشد خواهیم داشت:

$$x_2 = x'_2 - x''_2 \quad ; \quad x'_2 \geq 0 \quad x''_2 \geq 0$$

مثلاً اگر متغیر x_2 آزاد در علامت باشد خواهیم داشت:

ب) متغیرهای با حد پایین منفی

$$x_1 \geq -20$$

یک متغیر با حد پایین -20 است یعنی متغیر می‌تواند علاوه بر مقادیر بزرگتر از صفر، مقادیر صفر تا -20 را نیز داشته باشد. این مورد دقیقاً شبیه متغیر آزاد در علامت است با این تفاوت که مقدار ثابت 20 جایگزین شده است. بنابراین داریم:

$$x_1 \geq -20 \quad \rightarrow \quad x_1 = x'_1 - 20 \quad \text{و} \quad x'_1 \geq 0$$

فرم گسترده محدودیت ها و تابع هدف

تابع هدف	$\text{Max } Z = 3 X_1 + 5 X_2$	فرم گسترده 	$\text{Max } Z = 3 X_1 + 5 X_2$
	$\text{Min } Z = 2 X_1 + 5 X_2 - 3 X_3$		$\text{Max } (-Z) = -2 X_1 - 5 X_2 + 3 X_3$
محدودیت ها	محدودیت دوم (فرض کنید) $X_1 + 4 X_2 \leq 8$	فرم گسترده 	عدم تغییر در تابع هدف $X_1 + 4 X_2 + S_2 = 8$
	محدودیت چهارم (فرض کنید) $2 X_1 + X_2 \geq 10$		$\text{Max } Z = 3 X_1 + 5 X_2 - M R_4$ $\text{Max } (-Z) = -2 X_1 - 5 X_2 + 3 X_3 - M R_4$ $2 X_1 + X_2 - S_4 + R_4 = 10$
	محدودیت پنجم (فرض کنید) $X_2 = 6$		$\text{Max } Z = 3 X_1 + 5 X_2 - M R_5$ $\text{Max } (-Z) = -2 X_1 - 5 X_2 + 3 X_3 - M R_5$ $X_2 + R_5 = 6$

مثال - مدل‌های برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید. فرم گسترده این مدل‌ها به صورت زیر می باشد.

مدل الف (مدل استاندارد)

$\text{Max } Z = X_1 + 5X_2 + 2X_3$ s.t. : $3X_1 + X_2 - 4X_3 \leq 12$ $X_1 + 3X_3 \leq 6$ $X_1, X_2, X_3 \geq 0$	فرم گسترده 	$\text{Max } Z = X_1 + 5X_2 + 2X_3$ s.t. : $3X_1 + X_2 - 4X_3 + S_1 = 12$ $X_1 + 3X_3 + S_2 = 6$ $X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \geq 0$
--	---	--

مدل ب (مدل غیر استاندارد)

$\text{Min } Z = X_1 - 5X_2 + 7X_3$ s.t. : $2X_1 + 7X_2 - 4X_3 \geq 20$ $4X_1 + 3X_3 \leq 15$ $X_1 - 4X_2 = 10$ $X_1, X_2, X_3 \geq 0$	فرم گسترده 	$\text{Max } (-Z) = -X_1 + 5X_2 - 7X_3 - MR_1 - MR_3$ s.t. : $2X_1 + 7X_2 - 4X_3 - S_1 + R_1 = 20$ $4X_1 + 3X_3 + S_2 = 15$ $X_1 - 4X_2 + R_3 = 10$ $X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, R_1, R_3 \geq 0$
---	--	---

مدل پ (مدل غیر استاندارد)

$\text{Min } Z = 2X_1 - 3X_2$ s.t. : $3X_1 + 6X_2 \geq 10$ $X_1 + 2X_2 \geq 20$ $4X_1 - X_2 = 30$ $X_1, X_2 \geq 0$	فرم گسترده 	$\text{Max } (-Z) = -2X_1 + 3X_2 - MR_1 - MR_2 - MR_3$ s.t. : $3X_1 + 6X_2 - S_1 + R_1 = 10$ $X_1 + 2X_2 - S_2 + R_2 = 20$ $4X_1 - X_2 + R_3 = 30$ $X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, R_1, R_2, R_3 \geq 0$
--	---	---

نکته – حضور متغیر مصنوعی در فرم گسترده یک مدل، غیر استاندارد بودن آن را نشان می دهد و عدم حضور متغیر مصنوعی، استاندارد بودن مدل را تایید می کند.

نکته – حل مدل های استاندارد به روش سیمپلکس صورت می پذیرد.

نکته – حل مدل های غیر استاندارد به یکی از روش های زیر انجام می شود.

- M بزرگ
- دو مرحله ای
- سیمپلکس ثانویه

روش سیمپلکس

گامهای روش سیمپلکس

گام ۱ – وارد کردن مساله در جدول

مدل را به فرم گسترده تبدیل می کنیم و سپس متغیر های تصمیم تابع هدف را به سمت چپ تساوی منتقل می نماییم.

گام ۲ – تعیین متغیر ورودی

منفی ترین عدد سطر تابع هدف ، متغیر ورودی می باشد

گام ۳ – تعیین متغیر خروجی

اعداد سمت راست را بر اعداد مثبت ستون لولا تقسیم و کوچکترین عدد حاصل را به عنوان متغیر خروجی انتخاب می کنیم

گام ۴ – تهیه یک تابلوی جدید سیمپلکس

گام ۵ – چنانچه جدول هنوز غیر بهینه است و هم چنان در سطر تابع هدف عدد منفی داشتیم از گام ۲ مجدداً عملیات را تکرار می کنیم. عملیات تا رسیدن به جدول نهایی ادامه می یابد که در آن کلیه اعداد سطر تابع هدف مثبت هستند.

مدل زیر را به روش سیمپلکس حل کنید

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

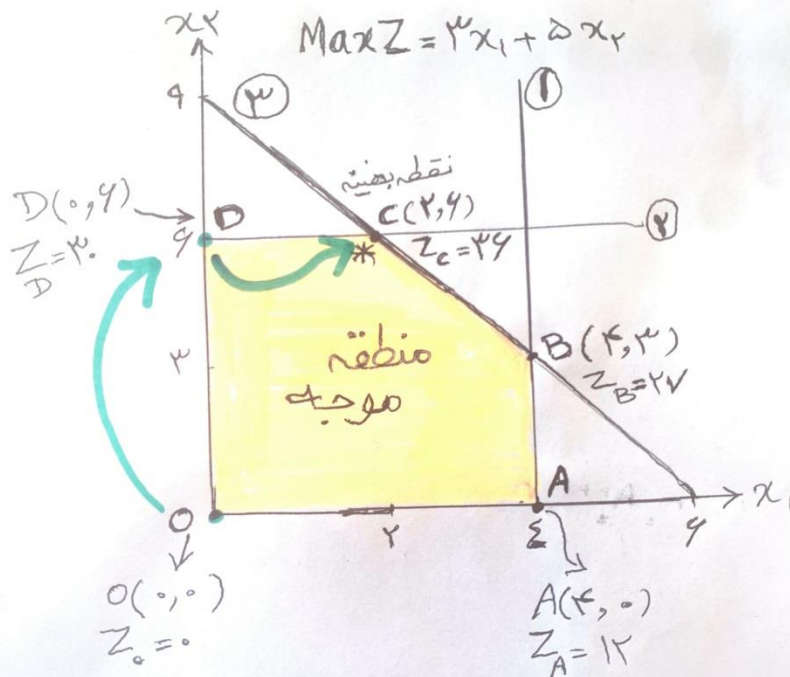
s.to :

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



روش M بزرگ

مدل زیر را به روش M بزرگ حل کنید

$$\text{Min } Z = x_1 - 2x_2$$

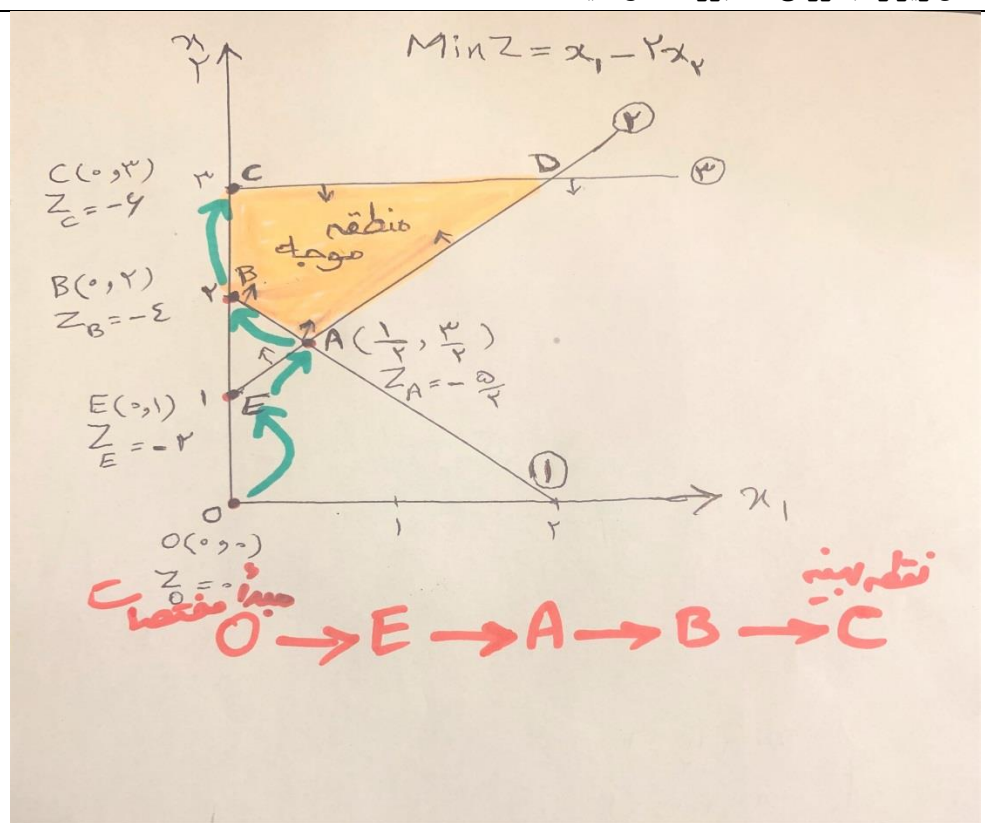
s.to :

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$-x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



روش دو مرحله ای

مدل زیر را به روش دو مرحله ای حل کنید

$$\text{Min } Z = 4X_1 + X_2$$

s.to :

$$3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

روش دو مرحله ای در دو مرحله انجام می شود.

مرحله اول

در مرحله اول، محدودیت های اصلی مساله را به فرم گسترده تبدیل می کنیم و تابع هدف جدیدی را به صورت

$$\text{Min } R_0 = \sum R_i$$

تابع هدف از مجموع متغیر های مصنوعی به دست می آید که باید حداقل گردد. در پایان مرحله اول مقدار R_0 باید حتماً " صفر شود که حاکی از صفر شدن تمام متغیر های مصنوعی است. شرط شروع مرحله دوم، صفر شدن R_0 در پایان مرحله اول است. اگر مقدار R_0 در پایان مرحله اول صفر نشد مدل فاقد منطقه موجه است و مساله جواب ندارد بالطبع مرحله دوم نیز انجام نمی شود.

مرحله دوم

از تابلوی بهینه مرحله اول به عنوان یک جواب اولیه برای مساله اصلی استفاده می کنیم. در این مرحله بجای ردیف R_0 ، تابع هدف اصلی در فرم Max آورده می شود و متغیر های مصنوعی را نیز از جدول حذف می کنیم. پس از یکه کردن متغیر های اساسی، عملیات روش سیمپلکس برای رسیدن به جواب نهایی ادامه می یابد.

روش سیمپلکس ثانویه

مدل زیر را به روش سیمپلکس ثانویه حل کنید

$$\text{Min } Z = 12X_1 + 5X_2$$

s.to :

$$4X_1 + 2X_2 \geq 80$$

$$2X_1 + 3X_2 \geq 90$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

گامهای روش سیمپلکس ثانویه

گام ۱- ابتدا مدل را به فرم استاندارد در می آوریم. در فرم استاندارد تابع هدف Max و تمامی محدودیت ها $\leq$ می شوند.

گام ۲- چون محدودیت ها کوچکتر مساوی هستند با افزودن متغیرهای کمکی آنها را به فرم گسترده تبدیل می کنیم.

گام ۳- منفی ترین عدد سمت راست را به عنوان متغیر خروجی انتخاب و سطر مربوط به آن را سطر لولا بنامید.

گام ۴- اعداد سطر تابع هدف را بر قدر مطلق اعداد منفی سطر لولا تقسیم می کنیم و کوچکترین مقدار را به عنوان متغیر ورودی انتخاب می کنیم.

گام ۵- جواب اساسی جدید را به دست می آوریم. چنانچه جدول هنوز غیر موجه است و در سمت راست عدد منفی وجود دارد از گام ۳ مجدداً عملیات را تکرار می کنیم. عملیات تا رسیدن به جدول نهایی ادامه می یابد که در آن کلیه اعداد سطر تابع هدف مثبت (بهینه) و تمام اعداد سمت راست هم مثبت (موجه) هستند.

موارد خاص در روش سیمپلکس

۱- جواب بهینه چند گانه

جدول نهایی

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R.H.S
Z	-۱	۰	۳	۰	۴	۰	۳۰
X_1	۰	۱	۲	۵	-۲	۰	۴
S_2	۰	۰	۱	-۱	۰	۱	۵

۲- فاقد ناحیه موجه (جواب)

جدول نهایی

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	R_3	R.H.S
Z	۱	۰	۰	$\frac{3}{2} + M$	M	۰	۰	$۱۲ - 6M$
X_2	۰	۰	۱	۳	۱	۰	۰	۴
X_1	۰	۱	۰	۰	۲	۰	-۱	۴
R_2	۰	۰	۰	۲	۱	۱	۰	۲

۳- ناحیه جواب بیکران بدون گوشه بهینه

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	R.H.S
Z		 -۴	۰	۰	۳	۹
s_1		-۲				۱۰
x_2		-۱				۳

متغیر ورودی داریم اما به دلیل غیر مثبت بودن ستون
لولا امکان انتخاب متغیر خروجی وجود ندارد

۴- ناحیه جواب یکران با گوشه بهینه

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S	
Z	۱	-۶	۲	۰	۰	۰	تابلوی
S_1	۰	۲	-۱	۱	۰	۲	اول
S_2	۰	۱	۰	۰	۱	۴	
Z	۱	۰	۰	۲	۲	۱۲	
X_1	۰	۱	۰	۰	۱	۴	تابلوی
X_2	۰	۰	۱	-۱	۲	۶	نهایی

۵- جواب تبهن

ءءءل نهایی

ءءءرهایی اساسی	Z	X _۱	X _۲	S _۱	S _۲	R.H.S
Z	۱	۰	۳	۰	۰	۱۰
S _۱	۰	۰	۱	۱	۲	۰
X _۱	۰	۱	-۱	۰	۴	۲

نکات سیمپلکس

نکته ۱ - عملیات سیمپلکس به جدول نهایی ختم می شود. جدول نهایی جدولی است که در سطر تابع هدف (Z) تمام مقادیر ، غیر منفی (بهینه) و مقادیر سمت راست نیز تمام مقادیر غیر منفی (موجه) باشند. جدول بهینه موجه ، جدول نهایی است .

Z	$+$ (بهینه) جدول نهایی	$+$ (موجه)
---	---------------------------	------------

نکته ۲- اگر تمام اعداد سمت راست غیر منفی باشند (موجه) و حداقل یکی از مقادیر سطر تابع هدف (Z) منفی باشد (غیر بهینه) از روش سیمپلکس معمولی برای حل استفاده می‌کنیم. روش سیمپلکس برای حل جداول موجه غیر بهینه به کار می‌رود.

Z	- (غیر بهینه) روش سیمپلکس	+(موجه)

نکته ۳- اگر تمام مقادیر سطر تابع هدف (Z) غیر منفی باشند (بهینه) و حداقل یکی از مقادیر سمت راست منفی باشد (غیرموجه) از روش سیمپلکس ثانویه برای حل استفاده می‌کنیم. روش سیمپلکس ثانویه برای حل جداول بهینه غیر موجه به کار می‌رود.

Z	$+$ (بهینه) روش سیمپلکس ثانویه	$-$ (غیر موجه)

نکته ۴ – جدول غیر بهینه غیر موجه به روش متغیر مصنوعی حل می شود. (بحث در تحقیق در عملیات ۲)

Z	- (غیر بهینه) روش متغیر مصنوعی	- (غیر موجه)

تحلیل عناصر تابلوی سیمپلکس

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R.H.S
Z	۱	-۳	-۳	-۵	۰	۰	۰
S_1	۰	۲	۲	۱	۱	۰	۴۳۰
S_2	۰	۳	۱	۲	۰	۱	۴۶۰
Z	۱	A	۰	۰	B	$\frac{7}{3}$	$\frac{3650}{3}$
X_2	۰	$\frac{1}{3}$	۱	۰	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{400}{3}$
X_3	۰	$\frac{4}{3}$	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{490}{3}$

تابلوی
اولتابلوی
نهایی

قیمت سایه ای

قیمت سایه ای عبارت است از ارزش نهایی منابع بکار رفته در تولید.

هر منبع دارای یک قیمت سایه ای است و با y_i نشان داده می شود. y_1 قیمت سایه منبع اول، y_2 قیمت سایه منبع دوم، y_3 قیمت سایه منبع سوم و... می باشد.

قیمت سایه ای، میزان تغییر Z را به ازای افزایش یک واحد منبع نشان می دهد. یعنی $y_i = \frac{\Delta Z}{\Delta b_i}$

در این رابطه b_i عدد سمت راست محدودیت i ام است یعنی b_1 عدد سمت راست محدودیت اول، b_2 عدد سمت راست محدودیت دوم و می باشد.

تصمیم گیرنده بر اساس قیمت سایه ای درمی یابد که چنانچه یک منبع از نوع i ام فراهم کند چه مقدار سود کل او افزایش می یابد یا به ازای نداشتن هر واحد منبع i ام چقدر سود از دست می دهد.

$y_3 = \frac{2}{3}$ یعنی اینکه چنانچه یک واحد از منبع سوم (مثلاً چوب) فراهم شود در اینصورت سود کل $\frac{2}{3}$ افزایش می یابد.

$$y_3 = \frac{\Delta Z}{\Delta b_3}$$

قیمت های سایه منابع در مدل استاندارد

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

S.to:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 460$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	R.H.S
Z	۱	$\frac{14}{3}$	۰	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{3650}{3}$
x_2	۰	$\frac{1}{3}$	۱	۰	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{400}{3}$
x_3	۰	$\frac{4}{3}$	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{490}{3}$

قیمت های سایه منابع در مدل غیر استاندارد

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 5x_2$$

S.to:

$$x_1 + 5x_2 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.S
Z	-۱	۰	۰	$\frac{5}{4}$	$\frac{35}{4}$	$M - \frac{5}{4}$	$M - \frac{35}{4}$	-۴۵
x_2	۰	۰	۱	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	۱
x_1	۰	۱	۰	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	۳

محاسبه Z جدول نهایی از طریق قیمت های سایه ای

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

S.to:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 460$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R.H.S
Z	۱	$\frac{14}{3}$	۰	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	?
x_2	۰	$\frac{1}{3}$	۱	۰	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{400}{3}$
x_3	۰	$\frac{4}{3}$	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{490}{3}$

$$Z = \begin{matrix} \text{ماتریس سطری قیمت} \\ \text{های سایه} \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{ماتریس ستونی اعداد سمت} \\ \text{راست تابلوی اول} \end{matrix}$$

رابطه بین اعداد سمت راست جدول اول و اعداد سمت راست جدول نهایی

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

S.to:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq b_1$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq b_2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R.H.S
Z	۱	$\frac{14}{3}$	۰	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{3650}{3}$
x_2	۰	$\frac{1}{3}$	۱	۰	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{400}{3}$
x_3	۰	$\frac{4}{3}$	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{490}{3}$

ماتریس مربع زیر
قیمت های سایه

×

ماتریس ستونی اعداد
سمت راست تابلوی اول

=

ماتریس ستونی اعداد
سمت راست تابلوی نهایی

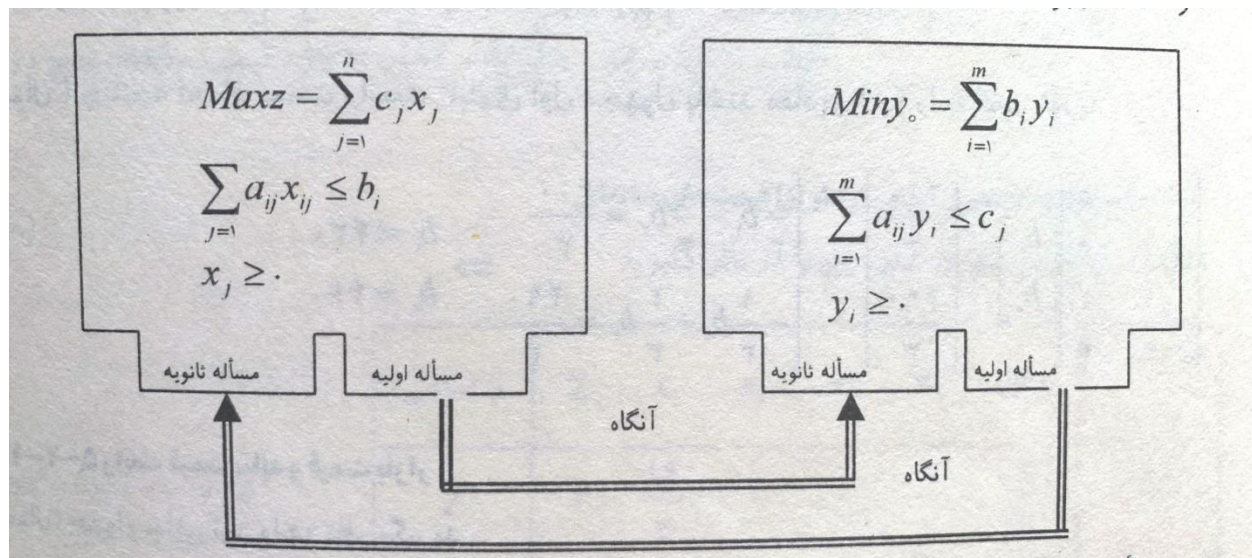
رابطه قیمت سایه و قیمت بازار

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R.H.S
Z	۱	۰	۰	۰	۳	۱	۴۵
X_2	۰	۰	۱	۰	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{35}{4}$
X_1	۰	۱	۰	۱	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$

قیمت سایه ای هر منبع حداکثر قیمتی است که پرداخت آن برای افزایش یک واحد از این منبع، مقرون به صرفه است. چنانچه قیمت بازار منبع از قیمت سایه آن منبع بیشتر باشد خرید منبع مقرون به صرفه نیست.

سؤال – چنانچه قیمت بازار منبع اول و دوم به ترتیب ۲ و ۴ باشد خرید کدام منبع را پیشنهاد می کنید.

مساله ثانویه



قواعد نوشتن مساله ثانویه

- الف) اعداد سمت راست در مساله اولیه ، ضرایب تابع هدف در مساله ثانویه را تشکیل می دهند.
- ب) ضرایب تابع هدف مساله اولیه ، مقادیر سمت راست محدودیت های مساله ثانویه را تشکیل می دهند.
- ج) ضرایب هر یک از متغیر های تصمیم در محدودیت های مساله اولیه ، محدودیت های مساله ثانویه را تشکیل می دهند.

مثال – ثانویه مدل زیر را بنویسید

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

S.to:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 460$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

نکته ۱- اگر مساله اولیه دارای ۲ محدودیت باشد ثانویه آن دارای ۲ متغیر است.

نکته ۲- اگر مساله اولیه دارای ۳ متغیر باشد ثانویه آن دارای ۳ محدودیت است.

مثال – ثانویه مدل زیر را بنویسید

$$\text{Min } Z = 2x_1 + 3x_2$$

S.to:

$$7x_1 + 6x_2 \leq 18$$

$$4x_1 + 2x_2 \geq 15$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

نکته ۳- اگر محدودیت i ام مساله علامت مساوی داشته باشد آنگاه در مساله ثانویه متغیر i ام آزاد در علامت می باشد.

مثال – ثانویه مدل زیر را بنویسید

$$\text{Min } Z = 2x_1 + 6x_2$$

S.to:

$$8x_1 + 2x_2 \geq 15$$

$$3x_1 + 7x_2 = 14$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

نکته ۴- اگر متغیر i ام مساله اولیه آزاد در علامت باشد آنگاه در مساله ثانویه محدودیت i ام علامت مساوی پیدا می کند.

مثال – ثانویه مدل زیر را بنویسید

$$\text{Min } Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

S.to:

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 12$$

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 8$$

$$x_1, x_3 \geq 0 \quad x_2 \text{ آزاد در علامت}$$

مثال – ثانویه مدل زیر را بنویسید

$$\text{Min } Z = 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 7x_4$$

S.to:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 250$$

$$x_1 + x_3 - x_4 = 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad x_4 \text{ آزاد در علامت}$$

قضایای ثانویه

مساله اولیه ، مساله ثانویه و نمایش هندسی آنها را در نظر بگیرید.

$$\text{Max } Z = 8x_1 + 4x_2$$

S.to:

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$5x_1 + x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

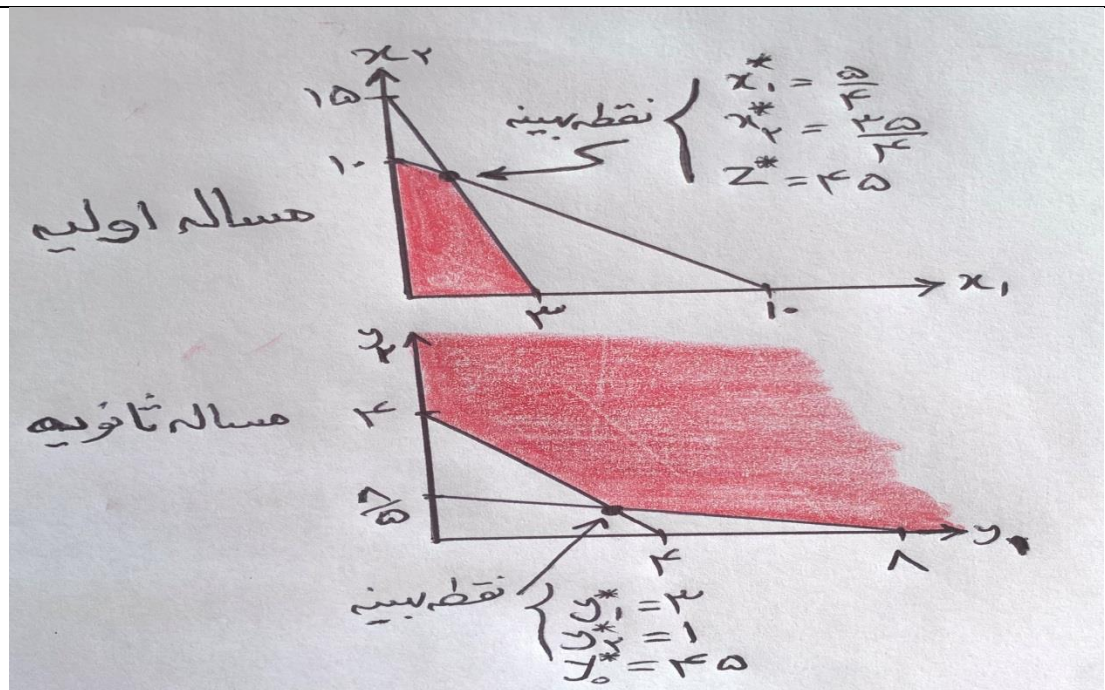
$$\text{Min } Z = 10y_1 + 5y_2$$

S.to:

$$y_1 + 5y_2 \geq 8$$

$$y_1 + y_2 \geq 4$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$



قضیه ۱ – ثانویه مساله ثانویه ، مساله اولیه است.

قضیه ۲ – چنانچه جوابهای بهینه مساله اولیه و مساله ثانویه به صورت زیر باشند

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots)$$

$$(y_1^*, y_2^*, y_3^*, \dots)$$

در این صورت

$$y_0^* = Z^*$$

قضیه ۳ – چنانچه یک جواب موجه مساله اولیه و یک جواب موجه مساله ثانویه باشد به صورت زیر داشته باشیم

$$(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

$$(y_1, y_2, y_3, \dots)$$

در این صورت

$$Z \leq y_0$$

قضیه ۴- از آنجا که هر z موجه غیر بهینه در مساله اولیه از z^* کوچکتر است و هر y_0 در مساله ثانویه بزرگتر از y_0^* است و همچنین با توجه به اینکه مقدار بهینه تابع هدف مساله اولیه و ثانویه برابر است پس:

$$z < z^* = y_0^* \leq y_0$$

قضیه ۵- تعداد نقاط گوشه مساله اولیه و مساله ثانویه با هم برابرند و از رابطه $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ به دست می آید.

قضیه ۶- هر جواب اساسی در مساله اولیه دارای یک جواب اساسی مکمل در مساله ثانویه است که بین متغیرهای آنها یک رابطه لنگی مکمل وجود دارد.

چنانچه x متغیر تصمیم مساله اولیه، s متغیر کمکی مساله اولیه، y متغیر تصمیم مساله ثانویه و t متغیر کمکی مساله ثانویه باشد می توان گفت که x با t و s با y متناظر است. یعنی:

$$x, t = 0$$

و

$$s, y = 0$$

تعیین جواب بهینه یک مساله با استفاده از تابلوی بهینه مساله دیگر

مثال - مساله اولیه زیر و جدول بهینه آن را در نظر بگیرید

$$\text{Max } Z = 8x_1 + 4x_2$$

S.to:

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$5x_1 + x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	R.H.S
Z	۱	۰	۰	۳	۱	۴۵
x_2	۰	۰	۱	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{35}{4}$
x_1	۰	۱	۰	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$

مثال - مساله ثانویه زیر و جدول بهینه آن را در نظر بگیرید

$$\text{Min } Z = 10y_1 + 5y_2$$

S.to:

$$y_1 + 5y_2 \geq 8$$

$$y_1 + y_2 \geq 4$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

متغیرهای اساسی	Z	y_1	y_2	t_1	t_2	A_1	A_2	R.H.S
Z	-۱	۰	۰	$\frac{5}{4}$	$\frac{35}{4}$	$M - \frac{5}{4}$	$M - \frac{35}{4}$	-۴۵
y_2	۰	۰	۱	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	۱
y_1	۰	۱	۰	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	۳

روابط بین ناحیه جواب مساله اولیه و مساله ثانویه

مساله ثانویه	مساله اولیه
ناحیه موجه بیکران با گوشه بهینه	ناحیه موجه محدود
فاقد ناحیه موجه (جواب)	ناحیه موجه بیکران بدون گوشه بهینه
ناحیه جواب بیکران بدون گوشه بهینه یا فاقد ناحیه موجه (جواب)	فاقد ناحیه موجه (جواب)

موفق باشید